高等代数试讲
齐次线性方程组的解

试讲人: 李本正
电子科技大学

2025 年 6 月 17 日

什么是齐次线性方程组?

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{1}$$

什么是齐次线性方程组?

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{1}$$

定义

一个形如 $Ax = 0$ 的线性方程组称为**齐次线性方程组**，其中:

- A 是 $m \times n$ 的系数矩阵;
- x 是 n 维未知向量;
- 右端是零向量：$0 \in \mathbb{R}^m$。

什么是齐次线性方程组?

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0.
\end{cases} \tag{1}
$$

定义

一个形如 $Ax = 0$ 的线性方程组称为**齐次线性方程组**，其中:

- A 是 $m \times n$ 的系数矩阵;
- x 是 n 维未知向量;
- 右端是零向量：$0 \in \mathbb{R}^m$。

显然，$Ax = 0$ 总有一个解 $x = 0$（称为**零解**）。

什么是齐次线性方程组?

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{1}$$

定义

一个形如 $Ax = 0$ 的线性方程组称为**齐次线性方程组**，其中:

- A 是 $m \times n$ 的系数矩阵;
- x 是 n 维未知向量;
- 右端是零向量：$0 \in \mathbb{R}^m$。

显然，$Ax = 0$ 总有一个解 $x = 0$（称为**零解**）。
那么：**什么情况下会存在非零解**呢?

非零解的存在条件（一）

设矩阵 $A = (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$，下列命题等价：

1. 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解；
2. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关；
3. $\mathrm{rank}(A) < n$

非零解的存在条件（一）

设矩阵 $A = (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n) \in \mathbb{R}^{m\times n}$，下列命题等价：

1. 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解；
2. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关；
3. $\mathrm{rank}(A) < n$

证明：$(1) \Rightarrow (2)$：
若 $Ax = 0$ 有非零解 $x = (k_1, \ldots, k_n)^T \neq 0$，则

$$Ax = (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n)(x_1, \ldots, x_n)^T = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n = 0$$

非零解的存在条件（一）

设矩阵 $A = (\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$，下列命题等价：

1. 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解；
2. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关；
3. $\mathrm{rank}(A) < n$

证明：$(1) \Rightarrow (2)$：
若 $Ax = 0$ 有非零解 $x = (k_1, \dots, k_n)^T \neq 0$，则

$$Ax = (\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n)(x_1, \dots, x_n)^T = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n = 0$$

这正是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 的**线性相关**定义：存在不全为零的系数使线性组合为零。

非零解的存在条件（二）

$(2) \Rightarrow (3)$：
若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关，则其中至少有一个向量可以被其他向量线性表示，也就是说线性无关的向量个数最多是 $n-1$，故 $\mathrm{rank}(A)$ 最大取值是 $n-1$，因此

$$\mathrm{rank}(A) < n$$

非零解的存在条件（二）

$(2) \Rightarrow (3)$：
若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关，则其中至少有一个向量可以被其他向量线性表示，也就是说线性无关的向量个数最多是 $n-1$，故 $\mathrm{rank}(A)$ 最大取值是 $n-1$，因此

$$\mathrm{rank}(A) < n$$

$(3) \Rightarrow (1)$：
若 $\mathrm{rank}(A) = r < n$，说明有 $n-r > 0$ 个自由变量。
因此齐次方程组有无穷多解，可以令自由变量取非零值得到非零解。

$$\Rightarrow \quad Ax = 0 \text{ 有非零解}$$

非零解的存在条件（二）

$(2) \Rightarrow (3)$：
若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关，则其中至少有一个向量可以被其他向量线性表示，也就是说线性无关的向量个数最多是 $n-1$，故 $\mathrm{rank}(A)$ 最大取值是 $n-1$，因此

$$\mathrm{rank}(A) < n$$

$(3) \Rightarrow (1)$：
若 $\mathrm{rank}(A) = r < n$，说明有 $n - r > 0$ 个自由变量。
因此齐次方程组有无穷多解，可以令自由变量取非零值得到非零解。

$$\Rightarrow \quad Ax = 0 \text{ 有非零解}$$

$$\boxed{Ax = 0 \text{ 有非零解} \iff \boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n \text{ 线性相关} \iff \mathrm{rank}(A) < n}$$

齐次线性方程组解的性质

解的性质：

$Ax = 0$ 的解向量的线性组合仍为 $Ax = 0$ 的解。

齐次线性方程组解的性质

解的性质：

$Ax=0$ 的解向量的线性组合仍为 $Ax=0$ 的解。

证 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_t$ 为 $Ax=0$ 的解向量，则

$$\begin{aligned} A(k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_t\boldsymbol{\alpha}_t) &= A(k_1\boldsymbol{\alpha}_1) + A(k_2\boldsymbol{\alpha}_2) + \cdots + A(k_t\boldsymbol{\alpha}_t) \\ &= k_1 A\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2 A\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_t A\boldsymbol{\alpha}_t \\ &= k_1\mathbf{0} + k_2\mathbf{0} + \cdots + k_t\mathbf{0} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

所以，$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_t\boldsymbol{\alpha}_t$ 仍为 $Ax=0$ 的解。

齐次线性方程组解的性质

解的性质:

$Ax=0$ 的解向量的线性组合仍为 $Ax=0$ 的解。

证 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 为 $Ax=0$ 的解向量，则

$$\begin{aligned}A(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\alpha}_t)&=A(k_1\boldsymbol{\alpha}_1)+A(k_2\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+A(k_t\boldsymbol{\alpha}_t)\\&=k_1A\boldsymbol{\alpha}_1+k_2A\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_tA\boldsymbol{\alpha}_t\\&=k_1\mathbf{0}+k_2\mathbf{0}+\cdots+k_t\mathbf{0}=\mathbf{0}.\end{aligned}$$

所以，$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\alpha}_t$ 仍为 $Ax=0$ 的解。

结论

齐次线性方程组 $Ax=0$ 的所有解构成 $\mathbb{R}^n$ 中的一个**解空间（线性子空间）**:

$$W=\{X\in\mathbb{R}^n|Ax=0\}$$

解空间的基础解系

$Ax=0$ **的基础解系：** 即 W 的一组基底。

基础解系的性质

对于齐次线性方程组 $Ax=0$, 若

1° $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_t$(t<n) 线性无关；

2° $Ax=0$ 的任一解向量均可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性表示，

则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 为 $Ax=0$ 的基础解系。

定理 1 及证明

定理 1

设 $\operatorname{rank}(A) = r < n$，则 $Ax = 0$ 有基础解系，且所含向量个数为 $n - r$，即 $\dim W = n - r$，这里 n 为方程组未知数个数。

定理 1 及证明

定理 1

设 $\mathrm{rank}(A)=r<n$，则 $Ax=0$ 有基础解系，且所含向量个数为 $n-r$，即 $\dim W=n-r$，这里 n 为方程组未知数个数。

证明：不妨设 A 的前 r 列向量线性无关，对 A 进行初等行变换化为行阶梯形矩阵：

$$A \xrightarrow{\text{初等行变换}} B=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r,n-r} \\ & & & \text{0 行} & & \end{pmatrix}$$

从而 $Ax=0$ 的同解方程组变为：

$$\begin{cases} x_1=-b_{11}x_{r+1}-\cdots-b_{1,n}x_n \\ \vdots \\ x_r=-b_{r1}x_{r+1}-\cdots-b_{r,n}x_n \end{cases} \qquad (2)$$

下面构造一组基础解系。将 $x_{r+1},\dots,x_n$ 分别取值：

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\text{依次得到} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \end{pmatrix}$$

定理 1 的证明（三）

我们从而可以构造出一组向量：

$$
b_1 = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad b_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}
$$

我们从而可以构造出一组向量：

$$b_1 = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad b_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

可以证明：

- $b_1, \ldots, b_{n-r}$ 线性无关
- 任意 $Ax = 0$ 的解都可以由它们线性表示

因此：$b_1, \ldots, b_{n-r}$ 构成一组**基础解系**，维数为 $n - r$, 即 $\dim W = n - r$.

例子

例 1：解齐次线性方程组 $Ax=0$，其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}$$

例子

例 1：解齐次线性方程组 $Ax=0$，其中

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&1\\1&3&2\end{bmatrix}$$

解：对系数矩阵 A 行化简后得到行阶梯型矩阵：

$$B=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2=-x_3\\x_1=x_3\end{cases}$$

例子

例 1：解齐次线性方程组 $Ax = 0$，其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

解：对系数矩阵 A 行化简后得到行阶梯型矩阵：

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -x_3 \\ x_1 = x_3 \end{cases}$$

构造基础解系：

$$\text{令} x_3 = t \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -t \\ x_3 = t \end{cases} \Rightarrow x = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

其中 $(1, -1, 1)^T$ 为基础解系。

小结

通过本节课程，我们学会了

- 齐次线性方程组的定义
- 齐次线性方程组非零解的存在性条件
- 求解齐次线性方程组的非零解（构造基础解系）